Relaciones de orden. Álgebras de Boole

MATEMÁTICA DISCRETA I

F. Informática. UPM

Conjuntos

Definición

Un conjunto es una colección bien definida de objetos en la que el orden es irrelevante. Dichos objetos pueden ser reales o conceptuales y se llaman elementos o miembros del conjunto. Por su estructura, dentro de un conjunto no se admiten repeticiones (todos sus miembros deben ser distintos).

- Definición por extensión de un conjunto: Consiste en enumerar sus elementos entre llaves.
  Ejemplo: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
- item Definición por comprensión de un conjunto: Mediante una propiedad que lo caracterice.
  Ejemplo: $A = \{a \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq a \leq 9\}$.

Definición

El cardinal de un conjunto A es el número de elementos de A y se representa por $|A|$.

Operaciones con conjuntos

Definición

Algunos símbolos: $\forall, \exists, \in, \notin, \subset, \not\subset, \cup, \cap, \emptyset, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \ldots$.

Definición

Algunas propiedades de las operaciones con conjuntos:

- **i)** $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \vee A$ (conmutativa),
- **ii)** $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap c), (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (asociativa),
- **iii)** $A \cap A = A, A \cup A = A$ (idempotente),
- **iv)** $A \cap (B \cup A) = A, A \cup (B \cap A) = A$ (absorción),
- **v)** $A \cap \emptyset = \emptyset,\ A \cup \emptyset = A$,
- **vi)** $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (distributiva).

Relaciones

Definición

El producto cartesiano de dos conjuntos A y B, $A \times B$, es el conjunto de pares ordenados de la forma (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Definición

Una relacion binaria R de un conjunto A en un conjunto B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$.

- Si $(a, b) \in R$ se dice que a está relacionado con b (aRb).
- Si $(a, b) \notin R$ se dice que a no está relacionado con b $(a\neg Rb)$.

Definición

Dados $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ y $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ conjuntos finitos no vacíos, y dada R relación de A en B, llamamos matriz de la relación R a la matriz $M_R \in \mathcal{M}_{m\times n}$ dada por $M_R = (m_{ij})$ donde $m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } a_i R b_j \\ 0 \text{ si } a_i \neg R b_j. \end{cases}$.

Relaciones de equivalencia

Definición

Una relación binaria R en un conjunto A es una relación de A en A, es decir, un subconjunto del producto cartesiano $A \times A$.

Definición

Una relación R en un conjunto A es una relación de equivalencia si y solo si es:

- reflexiva: aRa, para todo $a \in A$,
- simétrica: $aRb \Rightarrow bRa$,
- transitiva: aRb y $bRc \Rightarrow aRc$.

Dada R relación de equivalencia en A y dado $a \in A$ se llama clase de a al conjunto $[a] = \{b \in A \mid bRa\}$.
Cualquier elemento de $[a]$ es un representante de la clase.
Se llama conjunto cociente de A respecto de R al conjunto formado por las clases de equivalencia, esto es, $A/R = \{[a] \mid a \in A\}$.

Ejemplos de relaciones de equivalencia

Ejemplos

i) Dado P conjunto de rectas del plano y $rRs \Leftrightarrow r \| s$, R es relación de equivalencia y para toda $r \in P$ se tiene que $[r] = \{s \in P \mid r \| s\}$.

ii) Dado P conjunto de rectas del plano y $rRs \Leftrightarrow r \perp s$, R no es relación de equivalencia pues no es reflexiva ni transitiva.

iii) Dado $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $aRb \Leftrightarrow a + \dfrac{1}{a} = b + \dfrac{1}{b}$, se tiene que

$$a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b} \Leftrightarrow a - b = \frac{a-b}{ab} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a \\ \text{ó} \\ ab = 1 \Leftrightarrow b = \dfrac{1}{a}. \end{cases}$$

Entonces R es relación de equivalencia y para todo $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ se tiene que $[a] = \left\{a, \dfrac{1}{a}\right\}$.

Propiedades de las relaciones de equivalencia

Propiedades

Dada $R \subset A \times A$ relación de equivalencia, se tiene que:

a) $[a] = [b] \Leftrightarrow aRb$,

b) $[a] \neq [b] \Leftrightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$ *(las clases son disjuntas).*

Definición

Una partición en un conjunto no vacío A es una familia de subconjuntos no vacíos y disjuntos dos a dos de A tales que su unión es A.

Teorema

Si R es una relación de equivalencia en A, entonces el conjunto cociente A/R es una partición de A.

Teorema

Si $P = \{A_i\}_{i \in I}$ es una partición de A, entonces existe una relación de equivalencia R_P en A tal que el conjunto cociente $A/R_P = P$.

Relaciones de orden

Definición

Una relación R en un conjunto A es una relación de orden si es reflexiva, antisimétrica y transitiva, donde R es antisimétrica si $aRb + bRa \Rightarrow a = b$.
Un conjunto ordenado es un par (A, R), con R una relación de orden en A.

Ejemplos

$(\mathbb{N}, \leq)$ y $(\mathbb{N}, |)$ ($a|b \Leftrightarrow a$ divide a b) son conjuntos ordenados.

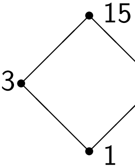
Definición

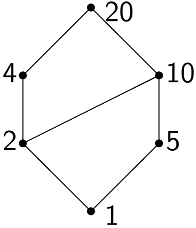
Dada R relación en A, se dice que dos elementos a y b de A son comparables si aRb o bRa.
Se dice que R es un orden total si todo par de elementos de A son comparables. Se dice entonces que (A, R) es un conjunto totalmente ordenado. (Ejemplo: $(\mathbb{N}, \leq)$ es totalmente ordenado).
Se dice que R es un orden parcial si es una relación de orden no total. (Ejemplo: $(\mathbb{N}, |)$ es parcialmente ordenado).

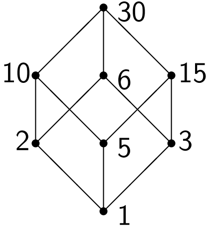
Diagrama de Hasse de una relación de orden

El diagrama de Hasse de una relación de orden en un conjunto finito es una representación de ésta, en la que si $a \neq b$ verifican que $a \leq b$, entonces se dibuja a por debajo de b y se unen a y b por un segmento, suprimiendo los segmentos que corresponden a la propiedad transitiva (si $a \leq b$ y $b \leq c$ se suprime el segmento correspondiente a $a \leq c$).

Ejemplo. Para D_{15}, D_{20} y D_{30} (D_n =divisores positivos de n) con la relación de divisibilidad ($a \leq b \Leftrightarrow a$ divide a b) se tienen los siguientes diagramas de Hasse:







$D_{15} = \{1, 3, 5, 15\}$ $D_{20} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

Ordenes en conjuntos producto

Sean $(A, \leq)$ y $(B, \leq')$ conjuntos ordenados, se define

i) $(a, b) \leq_{PROD} (c, d)$ si y solo si $a \leq c$ y $b \leq' d$,

ii) $(a, b) \leq_{LEX} (c, d)$ si y solo si $\begin{cases} a \neq c \text{ y } a \leq c \\ \text{ó} \\ a = c \text{ y } b \leq' d \end{cases}$.

Proposición

Sean $(A, \leq)$ y $(B, \leq')$ conjuntos ordenados. Entonces $(A \times B, \leq_{PROD})$ y $(A \times B, \leq_{LEX})$ son conjuntos ordenados.

Observación

Los órdenes anteriores también se pueden definir en el producto de n conjuntos ordenados.

Elementos característicos de conjuntos ordenados

Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado y S un subconjunto no vacío de A. Se dice que

i) $c \in A$ es cota superior de S si $x \leq c$ para todo $x \in S$,

ii) $c \in A$ es cota inferior de S si $c \leq x$ para todo $x \in S$,

iii) $s \in A$ es extremo superior o supremo de S si es cota superior y para toda cota superior c de S se tiene $s \leq c$,

iv) $i \in A$ es extremo inferior o ínfimo de S si es cota inferior y para toda cota inferior c de S se tiene $c \leq i$.

v) $m \in S$ es máximo de Sn si $x \leq m$ para todo $x \in S$,

vi) $m \in S$ es mínimo de Sn si $m \leq x$ para todo $x \in S$,

vii) $m \in S$ es maximal de S si no existe $x \in S \setminus \{m\}$ tal que $m \leq x$,

viii) $m \in S$ es minimal de S si no existe $x \in S \setminus \{m\}$ tal que $x \leq m$,

Se dice que S está acotado superiormente si existe $c \in A$ cota superior de S.
Se dice que S está acotado inferiormente si existe $c \in A$ cota inferior de S.
Se dice que S está acotado si está acotado superiormente e inferiormente.

Existencia y unicidad de elementos característicos

Teorema

Sea S un subconjunto no vacío de un conjunto ordenado $(A, \leq)$. Tanto el máximo como el mínimo de S, si existen, son únicos.

Teorema

Sea S un subconjunto no vacío de un conjunto ordenado $(A, \leq)$. Tanto el supremo como el ínfimo de S, si existen, son únicos.

Existencia y unicidad de elementos característicos

Teorema

Sea S un subconjunto finito no vacío de un conjunto ordenado $(A, \leq)$. Entonces S tiene al menos un elemento maximal y otro minimal.

Dem. Sea $a_1 \in S$. Si no existe $x \in S \setminus \{a_1\}$ tal que $x \leq a_1$, entonces a_1 sería minimal. En caso contrario existirá $a_2 \in S \setminus \{a_1\}$ tal que $a_2 \leq a_1$. Si no existe $x \in S \setminus \{a_1, a_2\}$ tal que $x \leq a_2$, entonces a_2 sería minimal. En caso contrario existirá $a_3 \in S \setminus \{a_1, a_2\}$ tal que $a_3 \leq a_2 \leq a_1$. Continuando este proceso obtendremos una familia $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ de elementos distintos de S tales que $a_k \leq a_{k-1} \leq \cdots \leq a_2 \leq a_1$. Finalmente, como el cardinal de S es finito, en un número finito de pasos obtendremos un elemento minimal.

Ordenación topológica

Teorema

Dado un orden parcial en un conjunto finito A, existe un orden total que lo contiene.

Dem. Sea a_1 un elemento minimal de A y consideremos el conjunto ordenado $(A \setminus \{a_1\}, \leq)$. Sea a_2 un elemento minimal de $(A \setminus \{a_1\}, \leq)$ y definimos $a_1 \leq' a_2$. Consideremos el conjunto ordenado $(A \setminus \{a_1, a_2\}, \leq)$ y sea a_3 un elemento minimal de $(A \setminus \{a_1, a_2\}, \leq)$. Definimos $a_1 \leq' a_2 \leq' a_3$. Como A es finito, si $|A| = n$ después de n pasos tendremos los elementos de A ordenados en la forma $a_1 \leq' a_2 \leq' \cdots \leq' a_n$.
Finalmente, el orden obtenido contiene al dado en el sentido de que si $a \leq b$, entonces $a \leq' b$. En efecto, si $a_i \leq a_j$, a_j no puede ser minimal de un conjunto que contenga a_i, luego hemos de haber escogido a_i antes que a_j. Por tanto $i \leq j$.

Isomorfismos de conjuntos ordenados

Definición

Dados dos conjuntos ordenados $(A, \leq)$ y $(B, \leq')$, y dada $f : A \longrightarrow B$, se dice que f conserva el orden si $f(a) \leq' f(e)$ siempre que $a \leq e$. Diremos que f es un isomorfismo de conjuntos ordenados si es biyectiva y f y f^{-1} conservan el orden.

Proposición

Sean $(A, \leq)$ y $(B, \leq')$ conjuntos ordenados y sea $f : A \longrightarrow B$ un isomorfismo de conjuntos ordenados. Entonces para todo $S \subset A$ que admita supremo se cumple que existe $\sup_{\leq'} f(S) = f(\sup_{\leq} S)$. Análogamente ocurre con los ínfimos.

Primera definición de retículo

Un conjunto ordenado $(R, \leq)$ es un retículo si para cualesquiera $a, b \in R$ existe $\sup\{a, b\} \in R$ e $\inf\{a, b\} \in R$.

Ejemplos

i) $(\mathbb{N}, \leq)$ y $(\mathbb{N}, |)$ son retículos,

ii) $(D_n, |)$ es retículo,

iii) $(\mathcal{P}(X), \subset)$ es retículo.

Observación. Todo conjunto totalmente ordenado es un retículo. El recíproco no es cierto en general. Por otra parte, si $(R, \leq)$ es un retículo, entonces $(R, \leq^{-1})$ también lo es.

Propiedades. Sea $(R, \leq)$ un retículo y sean $a, b, c, d \in R$. Entonces

i) $a \leq b, c \leq d \Rightarrow \begin{cases} \sup\{a, c\} \leq \sup\{b, d\} \\ \inf\{a, c\} \leq \inf\{b, d\} \end{cases}$,

ii) $a \leq b \Leftrightarrow \sup\{a, b\} = b \Leftrightarrow \inf\{a, b\} = a$.

Segunda definición de retículo

La noción de retículo se puede definir también del modo siguiente.

Definición

Un retículo es una terna $(R, \vee, \wedge)$ donde R es un conjunto y $\wedge, \vee : R \times R \longrightarrow R$ son dos operaciones binarias internas con las siguientes propiedades:

i) $a \wedge a = a, a \vee a = a$ (idempotente),

ii) $a \wedge b = b \wedge a, a \vee b = b \vee a$ (conmutativa),

iii) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c), (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ (asociativa),

iv) $a \wedge (b \vee a) = a, a \vee (b \wedge a) = a$ (absorción).

Observación

Si $(R, \vee, \wedge)$ es un retículo se tiene que $a \wedge b = a$ si y solo si $a \vee b = b$.

Equivalencia de ambas definiciones de retículo

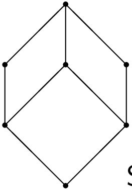
Proposición

Las dos definiciones de retículo son equivalentes y se relacionan de la siguiente manera:

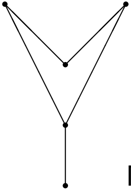
$$a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b \Leftrightarrow a \wedge b = a.$$

Dem. Si $(R, \leq)$ es un retículo definimos $\wedge, \vee : R \times R \longrightarrow R$ como $a \wedge b = \inf\{a, b\}$ y $a \vee b = \sup\{a, b\}$. Entonces $\wedge$ y $\vee$ verifican las cuatro propiedades (idempotente, conmutativa, asociativa y absorción) y $a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b \Leftrightarrow a \wedge b = a$.
Reciprocamente, si $(R, \vee, \wedge)$ es un retículo, definimos $a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b \Leftrightarrow a \wedge b = a$. Es fácil ver que $\leq$ es una relación de orden.

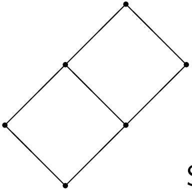
Ejemplos



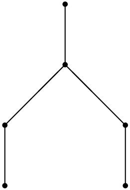
SI



NO



SI



NO

Indicación: Si en un conjunto ordenado existen dos elementos maximales o dos minimales entonces ese conjunto ordenado no es un retículo. Tampoco lo es si existen dos puntos (necesariamente no comparables) sin cotas superiores o inferiores o de tal forma que dentro del conjunto de cotas superiores (o inferiores) existan dos elementos minimales (o dos elementos maximales).

Subretículos

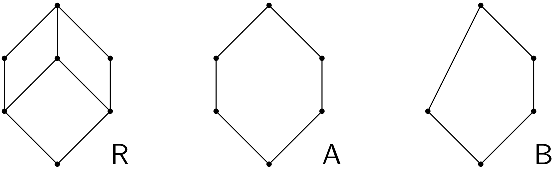
Sea $(R, \leq)$ un retículo. Se dice que un subconjunto no vacío A de R es un subretículo si $(A, \leq)$ es un retículo y para cualesquiera $a, b \in A$ se tiene que

$$\sup_A\{a, b\} = \sup_R\{a, b\} \text{ e } \inf_A\{a, b\} = \inf_R\{a, b\}.$$

Esto es equivalente a que para cualesquiera $a, b \in A$ se cumpla que

$$\sup_R\{a, b\} \in A \text{ e } \inf_R\{a, b\} \in A.$$

Ejemplos. Dados los retículos siguientes



se tiene que B es subretículo de A pero A no es subretículo de R.

Definición alternativa de subretículo

Sea $(R, \vee, \wedge)$ un retículo y sea A un subconjunto no vacío de R. Entonces $(A, \vee', \wedge')$ es un subretículo de $(R, \vee, \wedge)$ si para cualesquiera $a, b \in A$ se tiene que

$$a \vee' b = a \vee b \text{ y } a \wedge' b = a \wedge b.$$

Haciendo un pequeño abuso de notación, dado un retículo $(R, \vee, \wedge)$ y dado un subconjunto no vacío A de R, se tiene que $(A, \vee, \wedge)$ es un subretículo de $(R, \vee, \wedge)$ si y solo si

$$a \vee b \in A \text{ y } a \wedge b \in A,$$

para cualesquiera $a, b \in A$.

Ejemplo. $(D_n, |)$ es un subretículo de $(\mathbb{N}, |)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dem. Sean $a, b \in D_n$. Entonces $\sup_{\mathbb{N}}\{a, b\} = \mathrm{mcm}(a, b) \in D_n$ y por tanto $\sup_{D_n}\{a, b\} = \sup_{\mathbb{N}}\{a, b\}$. Análogamente $\inf_{D_n}\{a, b\} = \inf_{\mathbb{N}}\{a, b\}$.

Retículos producto

Proposición. Si (A, R) y (B, S) son retículos, entonces $(A \times B, R_{PROD})$ también lo es.

Proposición. Si (A, R) y (B, S) son retículos, entonces $(A \times B, R_{LEX})$ es retículo si R es un orden total en A o si existe $\inf B$ y $\sup B$.

Dem. Sean $(a, b), (c, d) \in A \times B$. Si $a = c$, entonces

$$\sup_{R_{LEX}}\{(a, b), (a, d)\} = (a, \sup_{S}\{b, d\}) \text{ e } \inf_{R_{LEX}}\{(a, b), (a, d)\} = (a, \inf_{S}\{b, d\}).$$

Si $a \neq c$ y aRc, $\sup_{R_{LEX}}\{(a, b), (c, d)\} = (c, d)$ e $\inf_{R_{LEX}}\{(a, b), (c, d)\} = (a, b)$.
Si $a \neq c$ y cRa, $\sup_{R_{LEX}}\{(a, b), (c, d)\} = (a, b)$ e $\inf_{R_{LEX}}\{(a, b), (c, d)\} = (c, d)$.
Finalmente, si a y c no son comparables, entonces

$$\sup_{R_{LEX}}\{(a, b), (c, d)\} = (\sup_{R}\{a, c\}, \inf B) \text{ e } \inf_{R_{LEX}}\{(a, b), (c, d)\} = (\inf_{S}\{a, c\}, \sup B)$$

siempre que existan $\inf B$ y $\sup B$.

Homomorfismos de retículos

Sean $(R, \leq)$ y $(S, \leq')$ retículos. Se dice que una aplicación $f : R \longrightarrow S$ es un homomorfismo de retículos si para cualesquiera $a, b \in R$ se tiene que

$$f(\sup_{\leq}\{a, b\}) = \sup_{\leq'}\{f(a), f(b)\} \text{ y } f(\inf_{\leq}\{a, b\}) = \inf_{\leq'}\{f(a), f(b)\}.$$

Utilizando la otra definición de retículo se tiene la siguiente caracterización equivalente de homomorfismo de retículos.

Observación

Sean $(R, \vee, \wedge)$ y $(S, \vee', \wedge')$ retículos y sea $f : R \longrightarrow S$ una aplicación entre ambos. Entonces f es un homomorfismo de retículos si para cualesquiera $a, b \in R$ se tiene que

$$f(a \vee b) = f(a) \vee' f(b) \text{ y } f(a \wedge b) = f(a) \wedge' f(b).$$

Isomorfismos de retículos

Sean $(R, \vee, \wedge)$ y $(S, \vee', \wedge')$ retículos y sea $f : R \longrightarrow S$ un homomorfismo entre ambos. Se dice que

i) f es un monomorfismo si f es inyectiva,

ii) f es un epimorfismo si f es suprayectiva,

iii) f es un isomorfismo si f es biyectiva.

Proposición. Sean $(R, \leq)$ y $(S, \leq')$ retículos y sea $f : R \longrightarrow S$ una aplicación biyectiva. Entonces f es un isomorfismo de retículos si y solo si f es un isomorfismo de conjuntos ordenados.

Dem. Si f es un isomorfismo de conjuntos ordenados, por la proposición 1.8.2, f es un isomorfismo de retículos.
Reciprocamente, supongamos que f es un isomorfismo de retículos y sean $a, b \in R$ tales que $a \leq b$, entonces $f(a) = f(\inf_{\leq}\{a, b\}) = \inf_{\leq'}\{f(a), f(b)\}$ y por tanto $f(a) \leq f(b)$. Análogamente, si $f(a) \leq f(b)$, entonces $f(\inf_{\leq}\{a, b\}) = \inf_{\leq'}\{f(a), f(b)\} = f(a)$ y como f es biyectiva, entonces $a = \inf_{\leq}\{a, b\}$ y por tanto $a \leq b$. Luego f es un isomorfismo de conjuntos ordenados.

Retículos acotados

Se dice que un retículo es acotado si tiene máximo y mínimo. Notaremos por 1 al máximo y por 0 al mínimo.

Ejemplo. $(\mathbb{N}, |)$ no es acotado.

Proposición. Todo retículo finito es acotado.

Dem. Supongamos que $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Entonces $a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n = 1$ pues $(a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n) \wedge a_i = a_i$ por la propiedad de absorción y $(a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n) \vee a_i = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n$ para todo $i \in \{1, 2 \ldots, n\}$. Por otra parte $a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n = 0$ pues $(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n) \wedge a_i = a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n$ y $(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n) \vee a_i = a_i$ (por la propiedad de absorción) para todo $i \in \{1, 2 \ldots, n\}$.

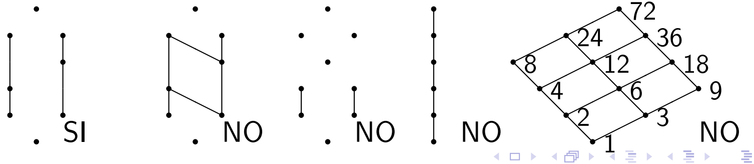
Retículos complementarios

Sea $(R, \leq)$ un retículo acotado. Dado $a \in R$ se dice que $a' \in R$ es complementario de a si $\sup\{a, a'\} = 1$ e $\inf\{a, a'\} = 0$. Se dice que $(R, \leq)$ es complementario si es acotado y todo elemento tiene complementario.

Ejemplos.

- **i)** $(\mathbb{N}, |)$ no es complementario (no es acotado),
- **ii)** $(D_n, |)$ es complementario si y solo si n es producto de números primos distintos,
- **iii)** $(\mathcal{P}(X), \subset)$ es complementario,
- **iv)** $(\{0, 1\}, \leq)$ es complementario.

Ejemplos de retículos complementarios y no complementarios.



Retículos distributivos

Se dice que un retículo $(R, \vee, \wedge)$ es distributivo si para cualesquiera $a, b, c \in R$ se tiene que $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$ y $(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$. Obsérvese que las dos igualdades se cumplen siempre que aparezcan dos elementos iguales o alguno de los elementos sea 0 o 1. Además, si alguna igualdad es cierta para a, b, y c también lo es para b, a y c.

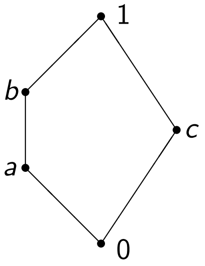
Ejemplo. $(\mathcal{P}(X), \subset)$ es distributivo.

Proposición. En un retículo acotado y distributivo, el complementario de un elemento, si existe, es único. Al único complementario de a se le denota por a'.

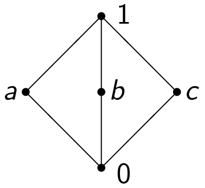
Corolario. Si R es acotado y un elemento tiene dos complementarios, entonces R no es distributivo.

Retículos distributivos

Proposición. Un retículo $(R, \vee, \wedge)$ es distributivo si y solo si no contiene un subretículo isomorfo a



o



Corolario. $(D_n, |)$ es distributivo, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Álgebras de Boole

Definición

Un álgebra de Boole es un retículo complementario y distributivo.

Ejemplos

i) $(\{0,1\}, \leq)$ es un álgebra de Boole,

ii) $(D_n, |)$, con n producto de números primos distintos, es un álgebra de Boole,

iii) $(\mathcal{P}(X), \subset)$ es un álgebra de Boole.

Propiedades

En todo álgebra de Boole A se verifica:

i) $(a')' = a$ *para todo* $a \in A$ *(propiedad involutiva),*

ii) $(a \vee b)' = a' \wedge b'$ *y* $(a \wedge b)' = a' \vee b'$, *para cualesquiera* $a, b \in A$ *(leyes de Morgan)*

Álgebras de Boole

Proposición

El producto de álgebras de Boole es un álgebra de Boole.

Dem. Sean A y B álgebras de Boole. Por la proposición 3.1.13 y 3.1.14, $A \times B$ es un retículo. Por otra parte $1_{A\times B} = (1_A, 1_B)$ y $0_{A\times B} = (0_A, 0_B)$. Luego $A \times B$ es acotado. También $A \times B$ es complementario pues para todo $(a, b) \in A \times B$ se tiene $(a, b)' = (a', b')$. Finalmente, es fácil ver que $A \times B$ es distributivo y por tanto un álgebra de Boole.

Ejemplo

$(B^n, \leq_{PROD}) = (\{0, 1\}^n, \leq)$ es un álgebra de Boole.

Álgebras de Boole finitas

Teorema

Si A es un álgebra de Boole finita, existe un conjunto finito C tal que $A \simeq \mathcal{P}(C)$.

Dem. Sea $C = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ el conjunto de los elementos minimales de $A \setminus \{0\}$. Es fácil ver que para todo $a \in A$ existen $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n} \in C$ tales que $a = a_{i_1} \vee a_{i_2} \vee \cdots \vee a_{i_n}$, y que esta expresión es única (salvo orden). Este hecho permite definir una biyección $\phi : A \longrightarrow \mathcal{P}(C)$ que resulta ser un isomorfismo de conjuntos ordenados y por tanto de retículos.

Álgebras de Boole finitas

Teorema

Si C es un conjunto finito con n elementos, entonces las álgebras de Boole $\mathcal{P}(C)$ y B^n son isomorfas ($B = \{0, 1\}$).

Dem. Si $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, consideramos

$$\begin{array}{cccll} \phi & : & \mathcal{P}(C) & \longrightarrow & B^n \\ & & \{c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_k}\} & \longmapsto & \phi(\{c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_k}\}) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \end{array}$$

donde $b_i = 1$ si y solo si $i \in \{i_1, i_2, \ldots i_n\}$. Es fácil ver que ϕ es biyectiva y que ϕ y ϕ^{-1} conservan el orden.

Corolario

Todo álgebra de Boole finita es isomorfa a B^n para algún $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, el diagrama de Hasse de todo álgebra de Boole es de tipo cúbico y para toda álgebra de Boole finita, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|A| = 2^n$.

Funciones booleanas

En esta sección estudiaremos aplicaciones entre algebras de Boole. Como toda álgebra de Boole finita es isomorfa a B^n para algún n, y toda aplicación $f : B^k \longrightarrow B^m$ tiene m componentes bastará con que estudiemos las funciones booleanas de la forma $f : B^n \longrightarrow B$. Éstas pueden ser representadas por expresiones construidas con n variables y las tres operaciones básicas de las álgebras de Boole.

Definición

Una función Booleana es una aplicación $f : A \longrightarrow C$ entre álgebras de Boole finitas. Puesto que toda álgebra de Boole finita es isomorfa a B^n para algún n, podemos definir función boolena como toda aplicación $f : B^k \longrightarrow B^m$.

Observación

Como toda función $f : B^k \longrightarrow B^m$ tiene m componentes basta estudiar las funciones booleanas de la forma $f : B^n \longrightarrow B$.

Funciones booleanas

Una función booleana $f : B^n \longrightarrow B$ se puede representar de la siguiente manera.

Definición

La tabla de verdad de una función Booleana $f : B^n \longrightarrow B$ es una tabla del tipo

x_1	x_2	$\dots$	x_n	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
0	0	$\dots$	0	$f(0, 0, \dots, 0)$
0	0	$\dots$	1	$f(0, 0, \dots, 1)$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
1	1	$\dots$	1	$f(1, 1, \dots, 1)$

donde se presentan todos los elementos de B^n y sus ímagenes.

Funciones booleanas

Ejemplo

La siguiente tabla

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

es la tabla de verdad de una función booleana $f : B^3 \longrightarrow B$.

Ejemplo

Todas las posibles funciones booleanas de grado 2 se pueden representar en una tabla de verdad conjunta. Existen 16 funciones booleanas de grado 2.

Expresiones booleanas

Definición

Definimos el concepto de expresión booleana en n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de forma recursiva del modo siguiente:

i) Las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son expresiones booleanas.

ii) Los símbolos 0 y 1 son expresiones booleanas.

iii) Si E_1 y E_2 son expresiones booleanas, entonces $E_1 \vee E_2$, $E_1 \wedge E_2$ y E_1' son expresiones booleanas.

iv) No hay más expresiones booleanas que las obtenidas por las reglas anteriores.

Es inmediato ver que toda expresión booleana en n variables define una función booleana en m variables, para todo $m \geq n$.
Si la expresión booleana $E(x_1, \ldots, x_n)$ define la función booleana $f : B^n \longrightarrow B$, diremos que $E(x_1, \ldots, x_n)$ representa a f.
Se dice que dos expresiones booleanas son equivalentes si representan la misma función booleana.

Expresiones booleanas

Teorema

Dada una función booleana $f : B^n \longrightarrow B$, existe una expresión booleana que representa a f.

Dem. Sea $S(f) = \{b \in B^n \mid f(b) = 1\}$. Para cada $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in S(f)$ consideramos $E_b = x_1^* \wedge x_2^* \wedge \cdots \wedge x_n^*$ donde $x_i^* = x_i$ si $b_i = 1$ y $x_i^* = x_i'$ si $b_i = 0$. Entonces $E(f) = \vee_{b \in S(f)} E_b$ representa a f.

Observación

A cada una de las expresiones E_b, $b \in S(f)$ se le llama producto elemental y a la expresión $E(f) = \vee_{b \in S(f)} E_b$ se le denomina expresión asociada a f en forma de suma de productos elementales.

Corolario

Dada una expresión booleana E existe otra expresión booleana E' equivalente a E en forma de suma de productos elementales.

Simplificación de expresiones booleanas

La expresión de una función booleana en forma de suma de productos elementales no es en general la más simple de todas las expresiones equivalentes que la representan. Por ejemplo $E(x, y) = x$ y $\tilde{E}(x, y) = (x \wedge y) \vee (x \wedge y')$ son expresiones equivalentes. Los métodos de simplificación que veremos se basan en la busqueda de pares de productos elementales que difieran solamente en una variable, como ocurre en el ejemplo mencionado. En concreto, estos métodos de simplificación se basan en el siguiente resultado.

Teorema

Si E es una expresión booleana en n variables y x_{n+1} es otra variable, entonces la expresión E y la expresión $\tilde{E} = (E \wedge x_{n+1}) \vee (E \wedge x'_{n+1})$ son equivalentes como expresiones en $n+1$ variables.

Método de los mapas de Karnaugh

Definición

Para cada $n = 2, 3, 4$ consideramos una cuadrícula de 2^n cuadrados. Cada uno de ellos representa un producto elemental, distribuidos de tal forma que dos productos elementales son adyacentes si y solo si difieren unicamente en una variable. A efectos de adyacencia, los lados opuestos de la cuadrícula se identifican. Estas cuadrículas son

	y	y'
x		
x'		

	y	y	y'	y'
x				
x'				
	z	z'	z'	z

	y	y	y'	y'	
x					t
x'					t'
x'					t'
					t
	z	z'	z'	z	

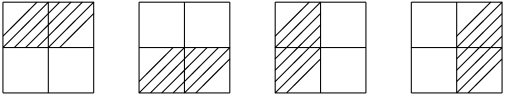
El mapa de Karnaugh de una expresión booleana E de n variables ($n = 2, 3, 4$) es una cuadrícula como las anteriores en la que se han sombreado los cuadrados correspondientes a los productos que aparecen en una expresión equivalente de E en forma de suma de productos elementales.

Método de los mapas de Karnaugh

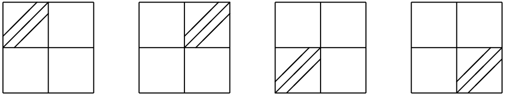
En el mapa de Karnaugh de una expresión booleana de n variables ($n = 2, 3, 4$), se llaman rectángulos simples a los correspondientes a las expresiones x_i y x_i', $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y a sus intersecciones k a k ($k = 2, \ldots, n$).

Ejemplo

Para $n = 2$, los rectángulos simples son, los correspondientes a las expresiones x, x', y e y',



y los correspondientes a las intersecciones dos a dos de estos,



Método de los mapas de Karnaugh

Observación (Método de los mapas de Karnaugh)

Consiste en lo siguiente:

i) Representamos el mapa de Karnaugh de E.

ii) Consideramos todos los rectángulos simples, de tamaño lo mayor posible, que recubran la zona sombreada del mapa de Karnaugh, aunque se solapen.

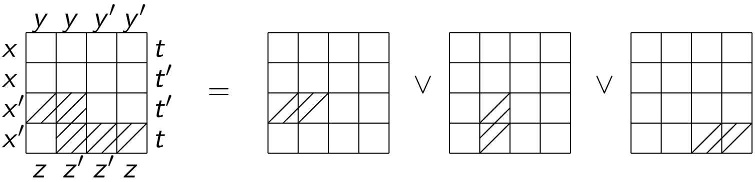
iii) Eliminamos los rectángulos simples que estén contenidos en la unión de otros de forma que la zona sombreada quede recubierta por el menor número de rectángulos del mayor tamaño posible.

iv) La unión de las expresiones que quedan al final del proceso es una expresión simplificada de la expresión original. Ésta dependerá de las elecciones hechas en el proceso.

Método de los mapas de Karnaugh

Ejemplo

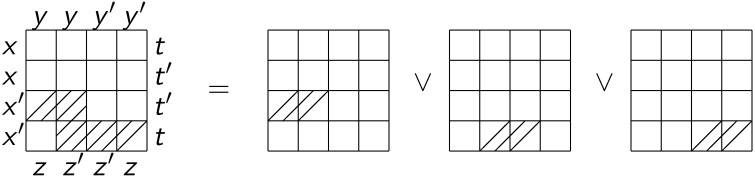
Si el mapa de Karnaugh de E es



entonces $E = x' \wedge y \wedge t' \vee x' \wedge y \wedge z' \vee x' \wedge y' \wedge t$.

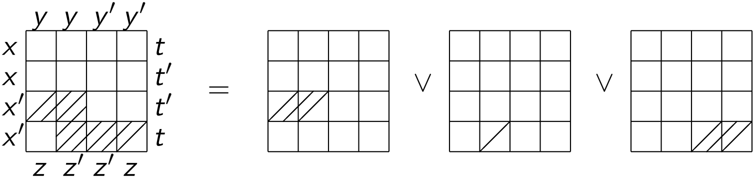
Método de los mapas de Karnaugh

Por otra parte también se puede descomponer



y por tanto $E = x' \wedge y \wedge t' \vee x' \wedge z' \wedge t \vee x' \wedge y' \wedge t$.

Es incorrecto descomponer



puesto que los rectángulos simples de la descomposición han de ser lo mayor posible.

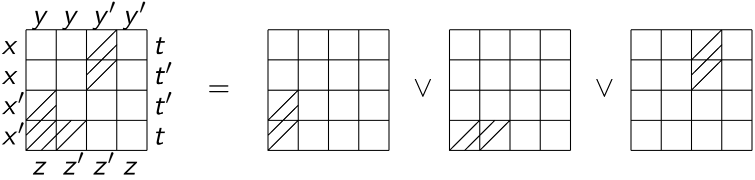
Método de los mapas de Karnaugh

Observación

El método de los mapas de Karnaugh se puede utilizar también para simplificar funciones que no estén definidas en todo B^n.

Ejemplo

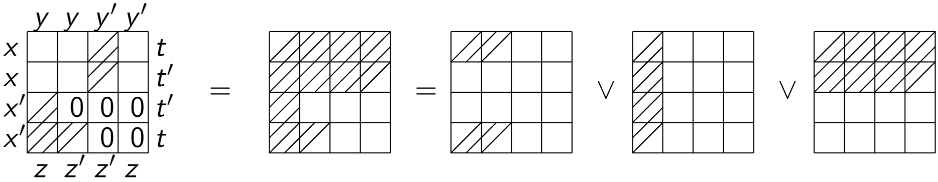
Sea $A = \{0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111, 1000, 1001\}$ el conjunto de números del 0 al 9 en notación binaria y sea $f : A \longrightarrow B$ tal que $f(xyzt) = 0 \Leftrightarrow xyzt$ representa un número menor que 5. Entonces el mapa de Karnaugh de f es



luego $E = x' \wedge y \wedge t \vee x' \wedge y \wedge z \vee x \wedge y' \wedge z'$.

Método de los mapas de Karnaugh

Sin embargo este resultado se puede mejorar si nos fijamos solo en los valores del dominio de f, y en los puntos no del dominio ponemos ceros o unos según convenga. Entonces se tiene



y por tanto $E = x \vee (y \wedge t) \vee (y \wedge z)$.

Método de Quine-McCluskey

Funciona agrupando sistematicamente productos que difieren en una variable, a partir de los elementos de $s(f)$, como sigue:

i) Se ordenan los elementos de $s(f)$ por bloques en orden decreciente según el número de unos.

ii) Se compara cada elemento de cada bloque con los del bloque inmediatamente inferior de la forma siguiente: Si dos elementos difieren en un solo término, se marcan ambos elementos, y se pone en una nueva lista el elemento obtenido al sustituir el término repetido por un guión.

iii) Se repite el paso ii) con la nueva lista y se continua este proceso.

iv) Cuando ya no se pueda continuar:

  a) Se consideran todos los elementos no marcados de todas las listas,

  b) para cada $b \in B^n$ con $f(b) = 1$ se elige un elemento no marcado:

   - Primero elegimos aquellos para los que existe una única posibilidad,
   - para los restantes se elige la menor cantidad posible de entre aquellos con mayor cantidad de guiones.

v) La expresión booleana formada por la disyunción de las expresiones correspondientes a estos elementos es una expresión simplificada.

Método de Quine-McCluskey

Ejemplo

Simplificar la expresión booleana $E(x, y, z) = (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z')$.
En este caso tenemos

$$\begin{array}{cc} 111 & * \\ \hline 110 & * \end{array} \qquad\qquad 11\text{-}$$

y con esta última lista no se puede continuar. A continuación consideramos la siguiente tabla

	111	110
11-	*	*

Luego la expresión buscada es $E(x, y, z) = x \wedge y$.

Método de Quine-McCluskey

Ejemplo. Hallar una expresión booleana simplificada de la función booleana cuya tabla de verdad es:

x	y	z	t	$E(x,y,z,t)$
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

Método de Quine-McCluskey

En este caso tenemos

1110	*
1100	*
1001	*
0110	*
0001	*
0100	*
1000	*
0000	*

11-0	*
-110	*
-100	*
1-00	*
-001	*
100-	*
01-0	*
000-	*
0-00	*
-000	*

-1-0
-00-
- -00

A continuación consideramos la siguiente tabla

	1110	1100	1001	0110	0001	0100	1000	0000
-1-0	*	*		*		*		
-00-			*		*		*	*
- -00		*				*	*	*

Luego la expresión buscada es $E(x, y, z, t) = (y \wedge t') \vee (y' \wedge z')$.

Método de Quine-McCluskey

En casa paso NO basta con tomar aquellos sumandos que basten para tapar los del paso precedente. Por ejemplo, para

x	y	z	t	$E(x,y,z,t)$
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Método de Quine-McCluskey

En este caso si en la primera simplificación solo tomamos el menor número de sumandos que cubren los iniciales tendríamos

0111	*
1100	*
0110	*
0101	*
0100	*
0000	*

011-
01-1
-100
0-00

que da lugar a la siguiente tabla

	0111	1100	0110	0101	0100	0000
011-	*		*			
01-1	*			*		
-100		*			*	
0-00					*	*

con lo que la expresión buscada sería $E(x,y,z,t) = (x' \wedge y \wedge z) \vee (x' \wedge y \wedge t) \vee (x' \wedge z' \wedge t') \vee (y \wedge z' \wedge t')$.

Método de Quine-McCluskey

Sin embargo, si lo hacemos comparando todos con todos, incluso cuando ya han sido cubiertos, tenemos

0111	*	011-	*	
1100	*	01-1	*	
0110	*	-100		01--
0101	*	01-0	*	
0100	*	010-	*	
0000	*	0-00		

que da lugar a la siguiente tabla

	0111	1100	0110	0101	0100	0000
-100		*			*	
0-00					*	*
01--	*		*	*	*	

Luego la expresión buscada es $E(x, y, z, t) = (x' \wedge y) \vee (x' \wedge z' \wedge t') \vee (y \wedge z' \wedge t')$.